Devoir maison

Exercice 1. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet ! On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ dont chaque terme u_n est donné par la troncature à l'ordre n du développement décimal de $\sqrt{2}$ (c'est-à-dire $u_0 = 1, u_1 = 1,4\ , u_2 = 1,41\ , ...$). Montrer que cette suite est de Cauchy, mais qu'elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 2.

1. Factoriser le polynôme $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer le PGCD de $P = (X-1)^2$ et de $Q = X^2+1$, et écrire une relation de Bézout.
3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$

Exercice 3.
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}+e^{-\frac{x}{2}}-2}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$

Exercice 4. Relation d'équivalence 1
On considère l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation $x \sim y$ ssi $xe^y = ye^x$.

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Donner le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$, selon la valeur de x.

Exercice 5. Relation d'équivalence 2 Soit G un groupe fini d'ordre pair. On considère la relation $g \sim g'$ ssi $g = g'$ ou $g = g'^{-1}$.

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Décrire les classes d'équivalence, et en déduire qu'il existe forcément un élément d'ordre 2 dans G (i.e. un élément $g \in G \setminus \{e\}$ tel que $g^2 = e$).

Exercice 6. Polynômes et développements limités On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f à l'ordre n soit de la forme

$$f(x) = P(0) + P(1)x + P(2)x^2 + ... + P(n)x^n + o(x^n)$$

(Autrement dit, si f est développable en série entière au voisinage de 0, son développement est $\sum\limits_k P(k)x^k$.)

1. (Préliminaire)
   Rappeler pourquoi pour toute fonction C^∞ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ qui admet un DL à l'ordre $n+1$ en $x_0 \in I$, sa dérivée admet un DL à l'ordre n en x_0 qu'on exprimera en fonction de celui de f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner le DL à l'ordre n, en 0, de $\frac{1}{1-x}$, puis de sa dérivée m-ième ${\frac{1}{1-x}}^{(m)}$.
3. Observer que ces fonctions vérifient bien l'hypothèse de l'énoncé, à savoir que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a un polynôme P_m (que l'on explicitera) tel que

$$\frac{1}{1-x}^{(m)} = \sum_k P_m(k)x^k$$

4. Montrer que $\{P_0, P_1, ...P_d\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$.
5. En déduire que si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est une fraction rationnelle (au voisinage de 0, on peut même expliciter le voisinage maximal), que l'on explicitera.

   Remarque : Il existe des fonctions C^∞ (mais qui ne sont pas développables en série entières !) qui admettent un DL en 0 nul à tout ordre, par exemple, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{1/x^2}$ si $x \neq 0$, dont toutes les dérivées se prolongent continûment par 0 en 0. Ainsi l'exercice ne prouve pas que toute fonction C^∞ qui satisfait l'hypothèse de l'énoncé est une fraction rationnelle...

Exercice 7.

Soit X un ensemble. Montrer que X est infini ssi pour tout fonction $f : X \to X$, il existe $A \in \mathcal{P}(X)$ non vide et distincte de X telle que $f(A) \subset A$ (i.e. stable par f).

Exercice 8. Dangereux...

Existe-t-il un ensemble E tel que $\mathrm{card}(\mathbb{N}) < \mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(\mathbb{R})$?